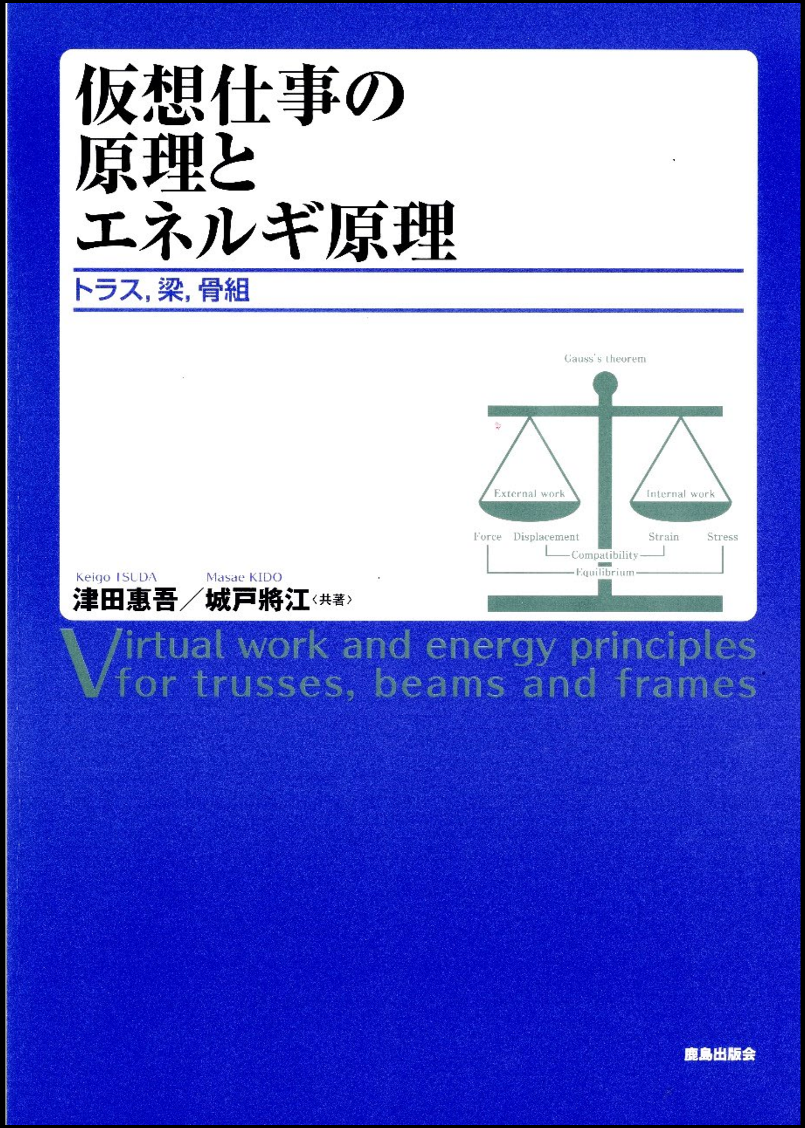
仮想仕事の原理

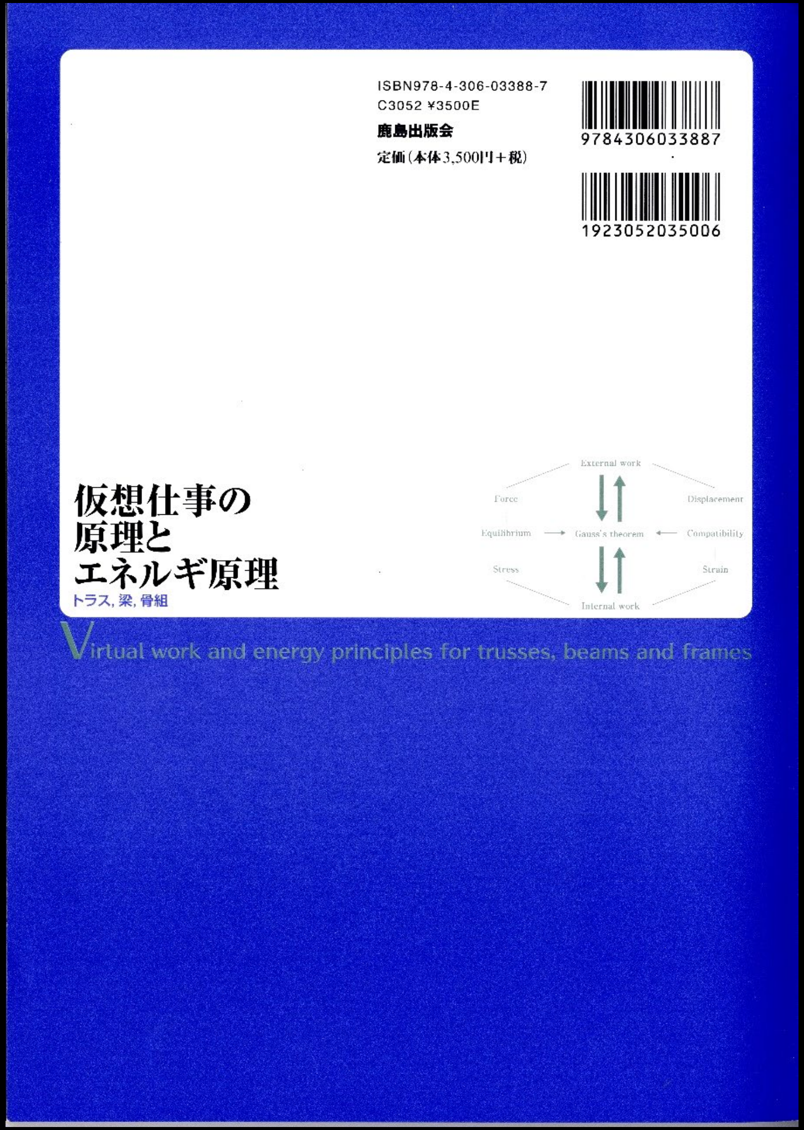
④ ダイバージェンスの定理
例題

城戸將江・津田惠吾 2021.04

仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月





仕事の原理・エネルギ原理の概観

カスティリアーノ第1定理

最小ポテンシャルエネルギの原理

⑨, ⑩

仮想仕事の原理

③, ④

単位仮想変位法

ダイバージェンスの定理

⑤, ⑥

単位仮想荷重法

⑦, ⑧ 相反定理

①, ②

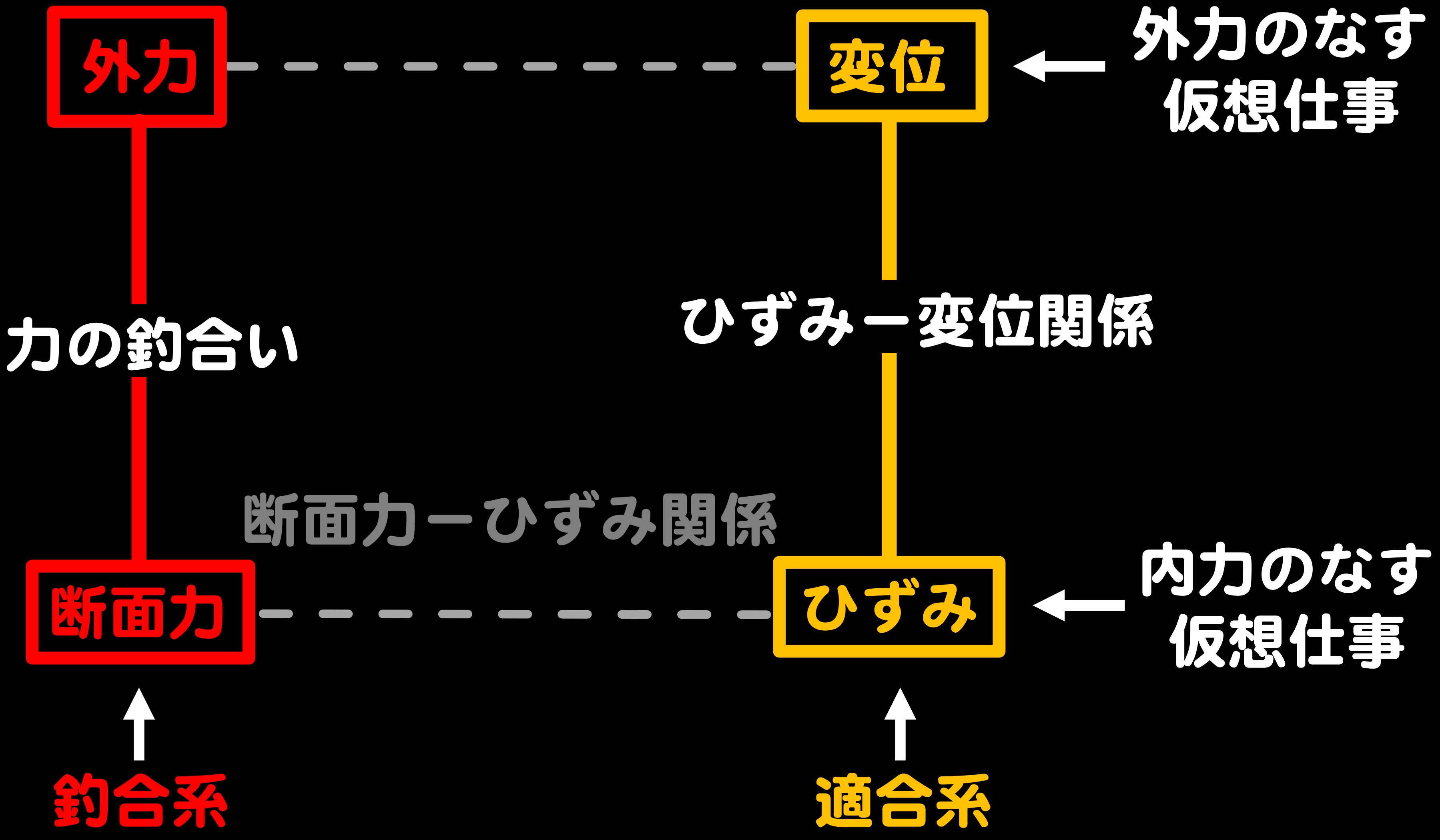
構造力学の"構造"

補仮想仕事の原理

最小コンプリメンタリエネルギの原理

カスティリアーノの第2定理

釣合系と適合系

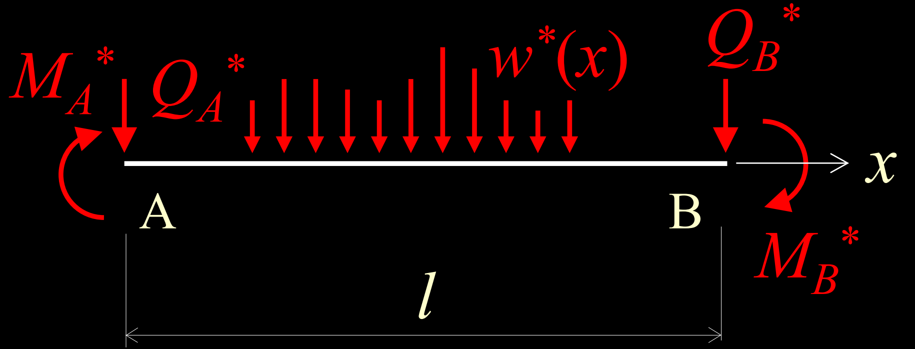

外力
変位
外力のなす
仮想仕事
力の釣合い
ひずみー変位関係
断面力ーひずみ関係
断面力
ひずみ
内力のなす
仮想仕事
釣合系
適合系

ダイバージェンスの定理

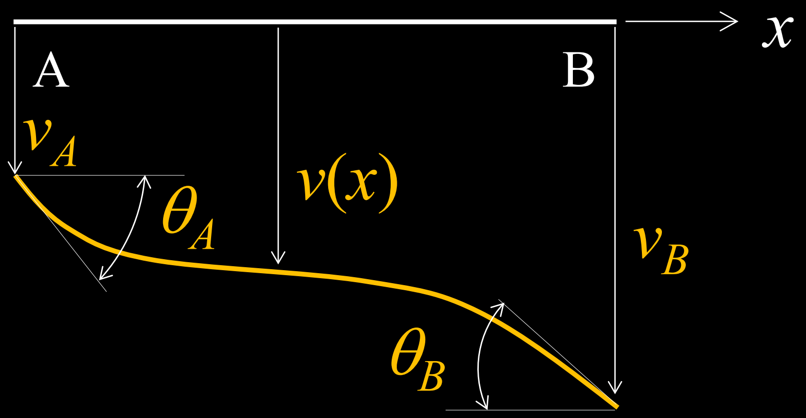
外力のなす仮想仕事　　内力のなす仮想仕事

$$Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x)v(x)dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x)dx$$

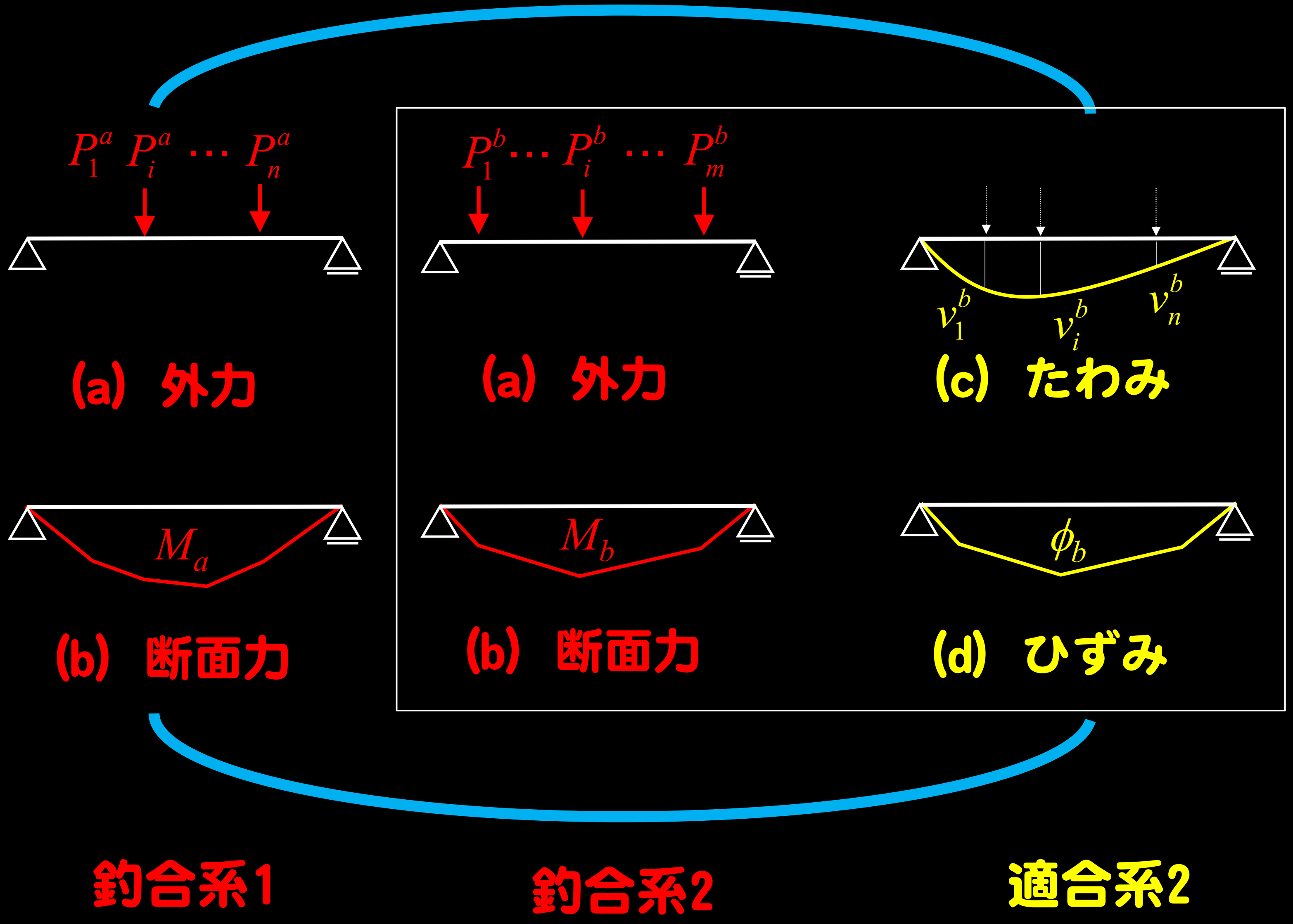
釣合系の外力



適合系の変位



例題1　ダイバージェンスの定理式 1



釣合系1の外力が適合系2のたわみに対してなす仮想仕事

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b$$

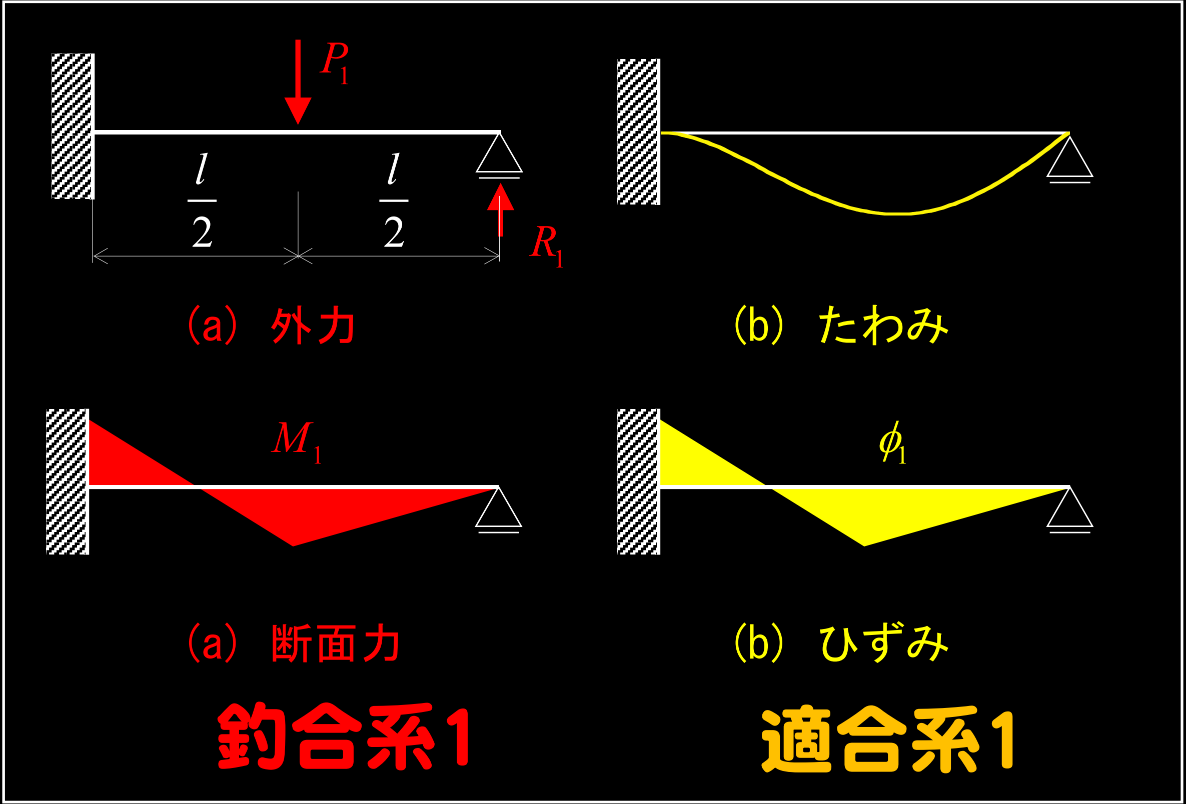
釣合系1の断面力が適合系2のひずみに対してなす仮想仕事

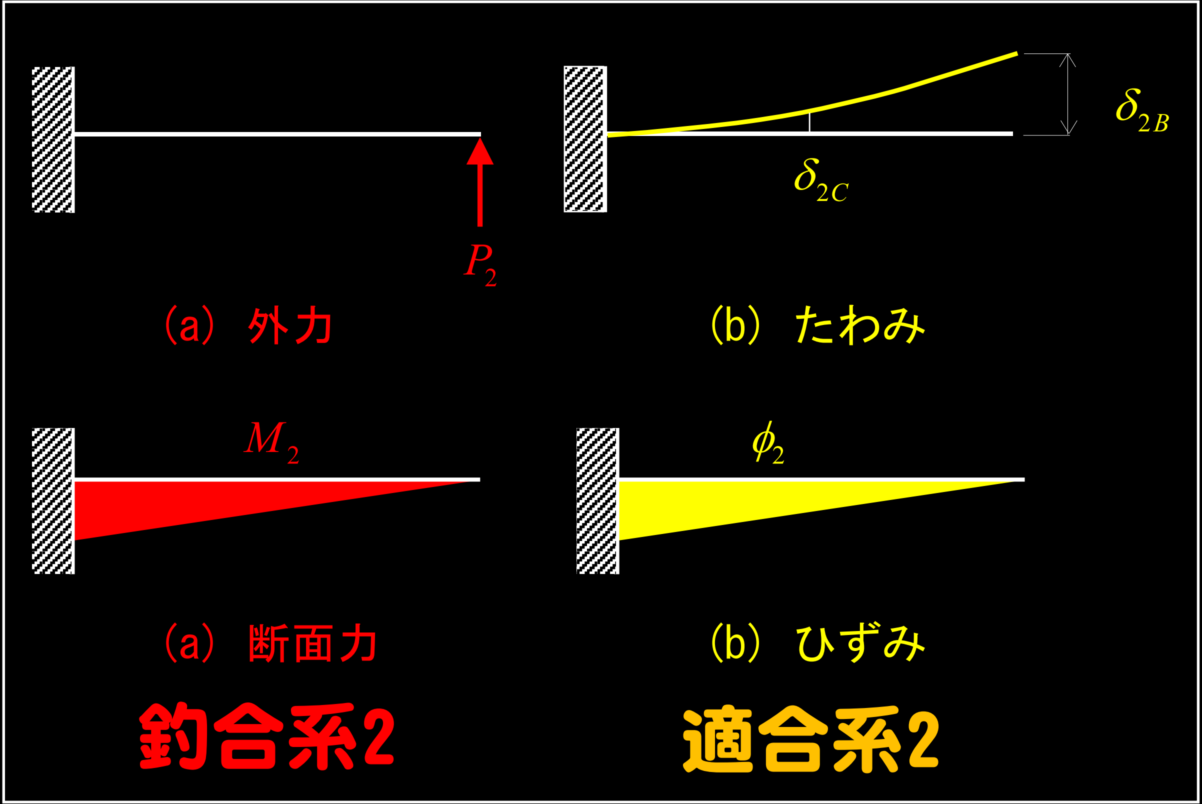
$$\int_0^l M_a \cdot \phi_b dx$$

ダイバージェンスの定理式

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = \int_0^l M_a \cdot \phi_b dx$$

例題2　ダイバージェンスの定理式 2





ダイバージェンスの定理式

釣合系1と適合系2

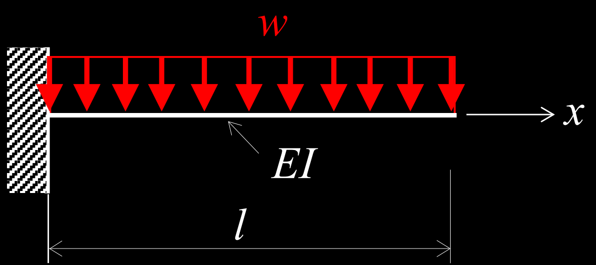
$$-P_1 \cdot \delta_{2C} + R_1 \cdot \delta_{2B} = \int_l M_1 \phi_2 dx$$

釣合系2と適合系1

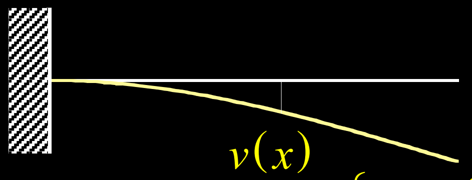
$$P_2 \cdot 0 = \int_l M_2 \phi_1 dx$$

例題3　定理の成立つ確認　1

幾何学的境界条件の同じ釣合系と適合系



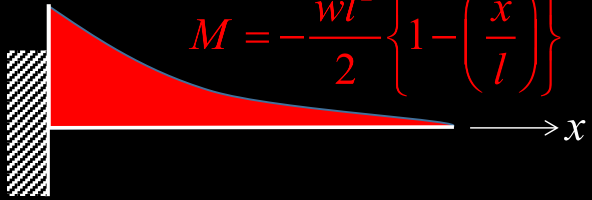
(a) 外力



$$v=\frac{Pl^3}{6EI}\left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}$$

(c) たわみ

$$M=-\frac{wl^2}{2}\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}^2$$



(b) 断面力

$$\phi=-\frac{Pl}{EI}\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

(d) ひずみ

釣合系　　**適合系**

ダイバージェンスの定理式

$$\int_0^l w\cdot v dx=\int_0^l M\cdot\phi dx$$

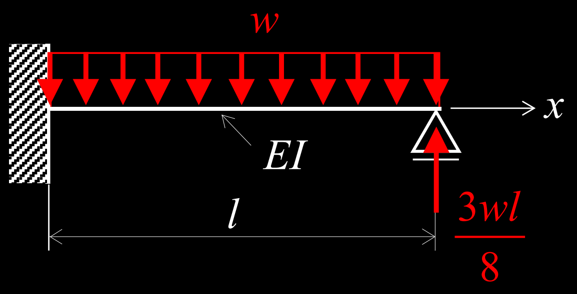
$$\text{左辺}=\int_0^l w\cdot v dx$$
$$=\int_0^l w\cdot\frac{Pl^3}{6EI}\left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}dx$$
$$=\frac{w\cdot Pl^4}{8EI}$$

$$\text{右辺}=\int_0^l M\cdot\phi dx$$
$$=\int_0^l\left[-\frac{wl^2}{2}\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}^2\right]\cdot\left[-\frac{Pl}{EI}\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}\right]dx$$
$$=\frac{w\cdot Pl^4}{8EI}$$

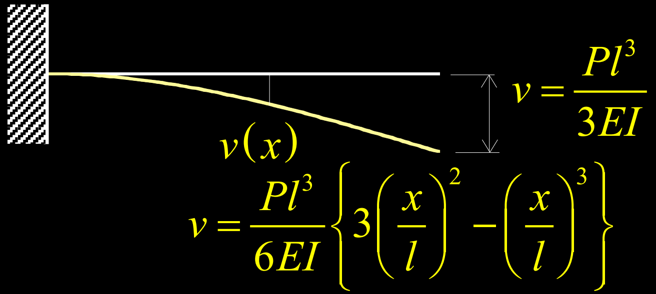
$\int_0^l w\cdot v dx=\int_0^l M\cdot\phi dx$ となっている

例題4　定理の成立つ確認 2

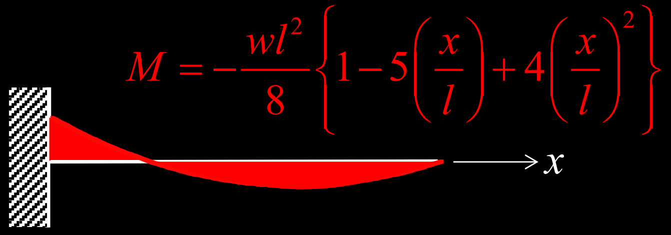
幾何学的境界条件の**違う**釣合系と適合系



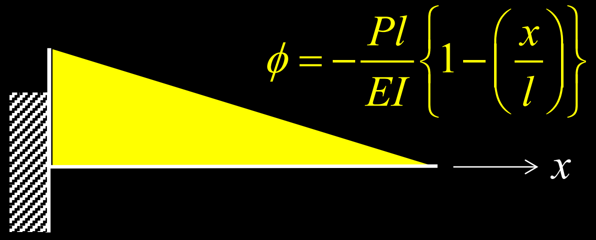
（a）外力



（c）たわみ



（b）断面力



（d）ひずみ

釣合系　　**適合系**

ダイバージェンスの定理式

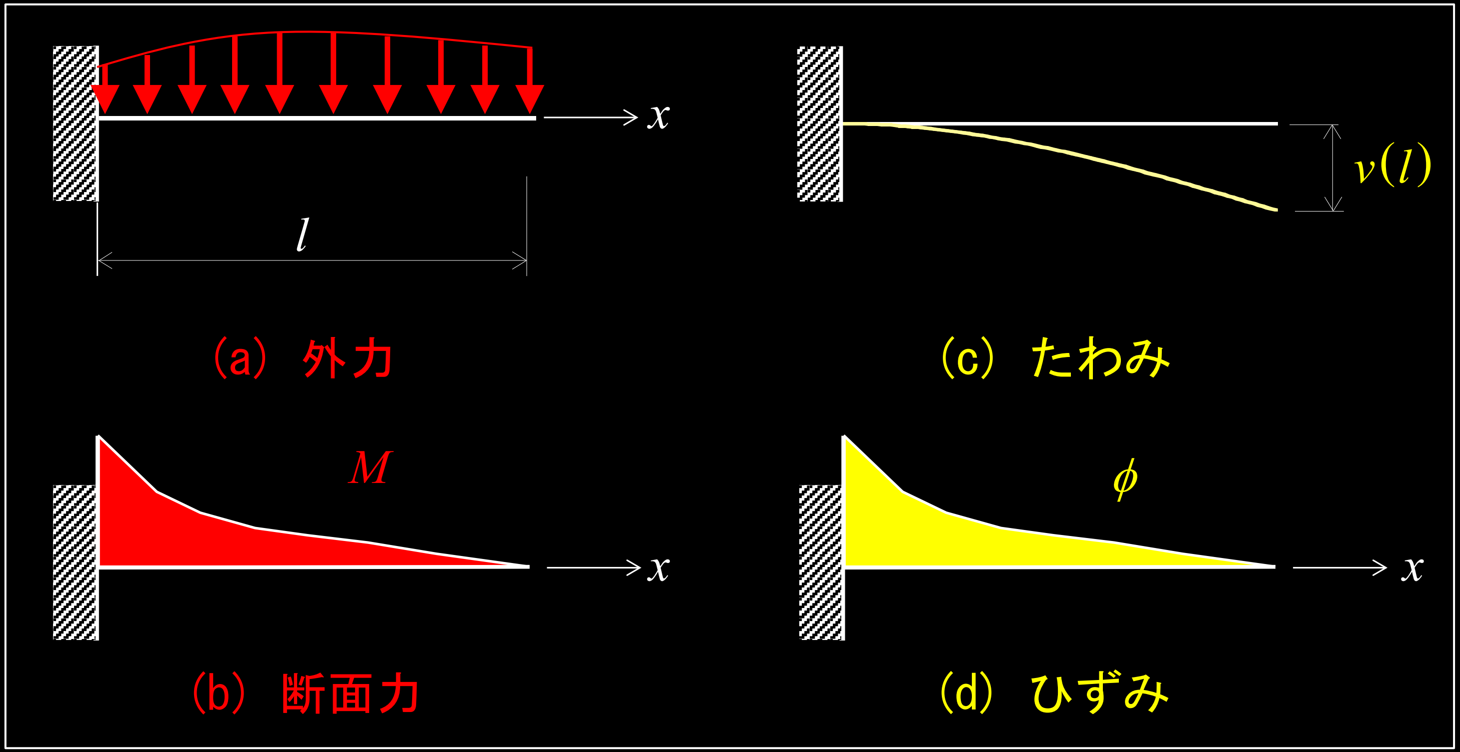
$$\int_0^l w\cdot v dx-\frac{3wl}{8}\cdot\frac{Pl^3}{3EI}=\int_0^l M\cdot\phi dx$$

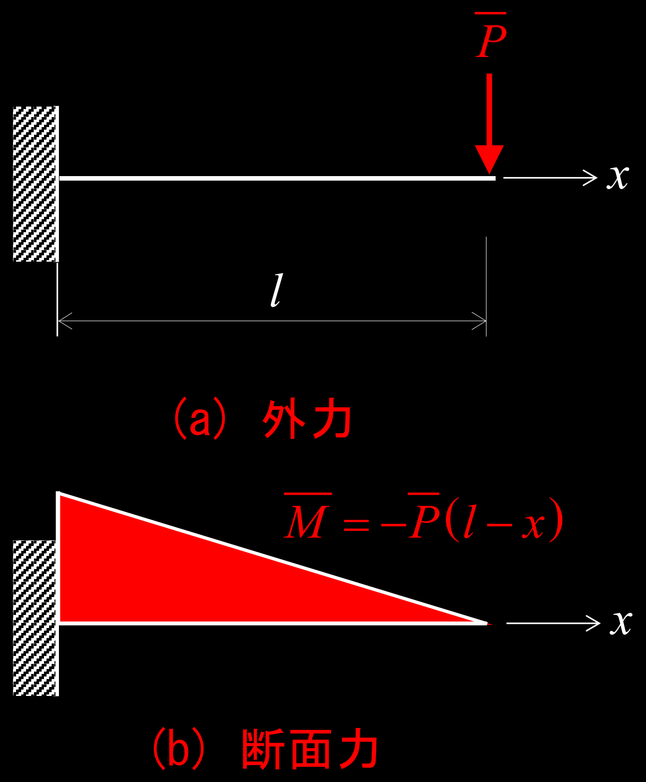
$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=\int_0^l w\cdot v dx-\frac{3wl}{8}\cdot\frac{Pl^3}{3EI}\\
&=\int_0^l w\cdot\frac{Pl^3}{6EI}\left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}dx-\frac{3wl}{8}\cdot\frac{Pl^3}{3EI}\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}&=\int_0^l M\cdot\phi dx\\
&=\int_0^l\left[-\frac{wl^2}{8}\left\{1-5\left(\frac{x}{l}\right)+4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}\right]\cdot\left[-\frac{Pl}{EI}\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}\right]dx\\
&=0
\end{aligned}
$$

$$\int_0^l w\cdot v dx-\frac{3wl}{8}\cdot\frac{Pl^3}{3EI}=\int_0^l M\cdot\phi dx$$ となっている

例題5 単位仮想荷重法へ 1





適合系

釣合系

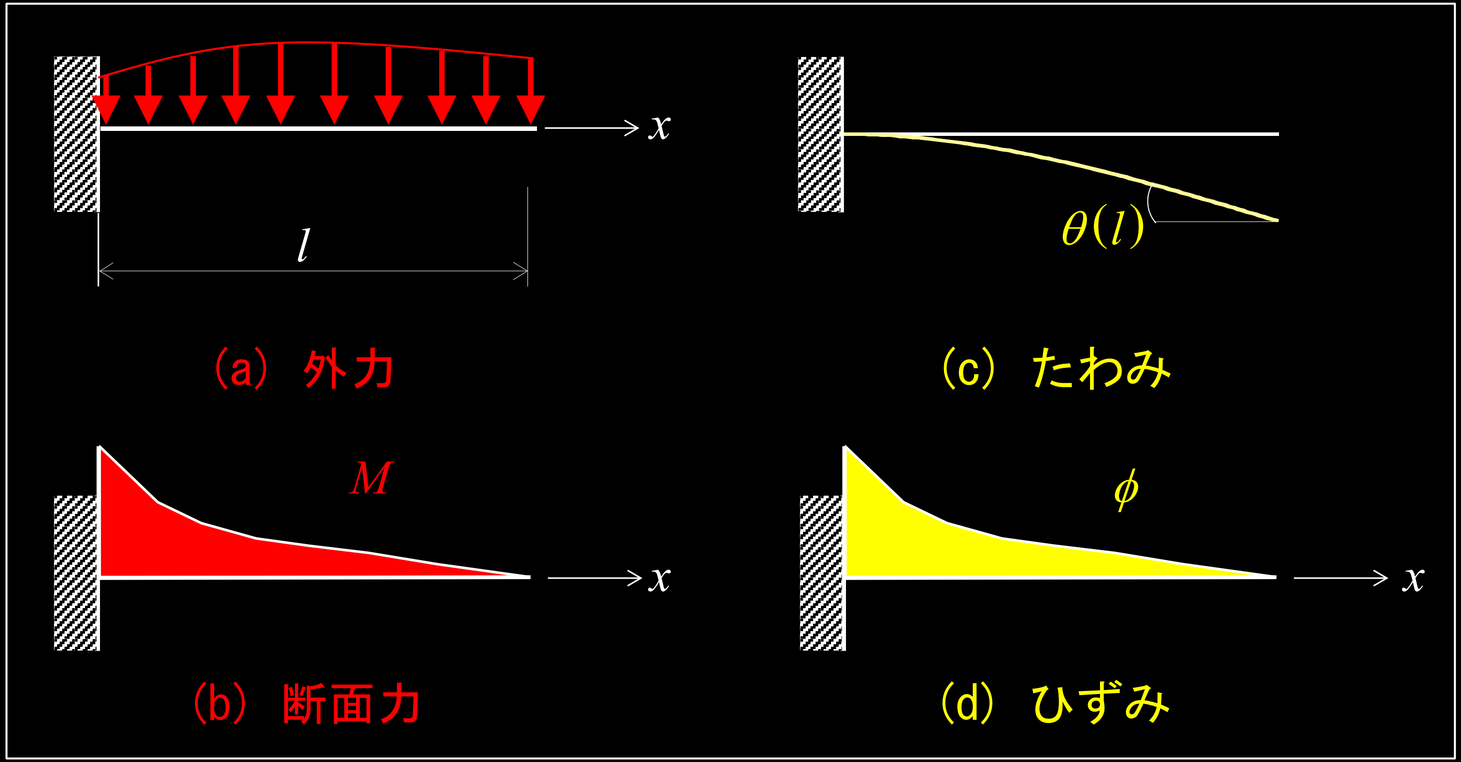
ダイバージェンスの定理式

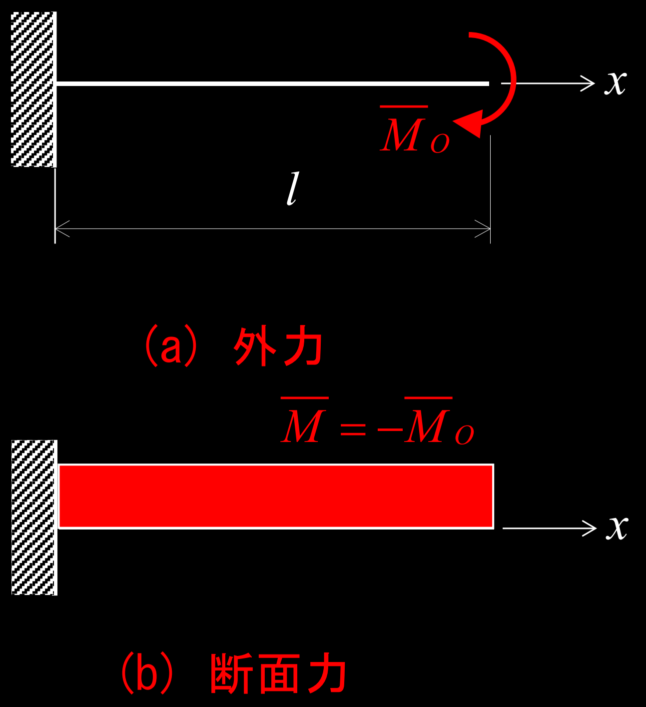
$$\overline{P}\cdot v(l)=\int_0^l \overline{M}\cdot\phi dx$$

$\overline{P}=1$ として，右辺を計算すれば
たわみ $v(l)$ が求まる

単位仮想荷重法である．

例題6 単位仮想荷重法へ 2





適合系　**釣合系**

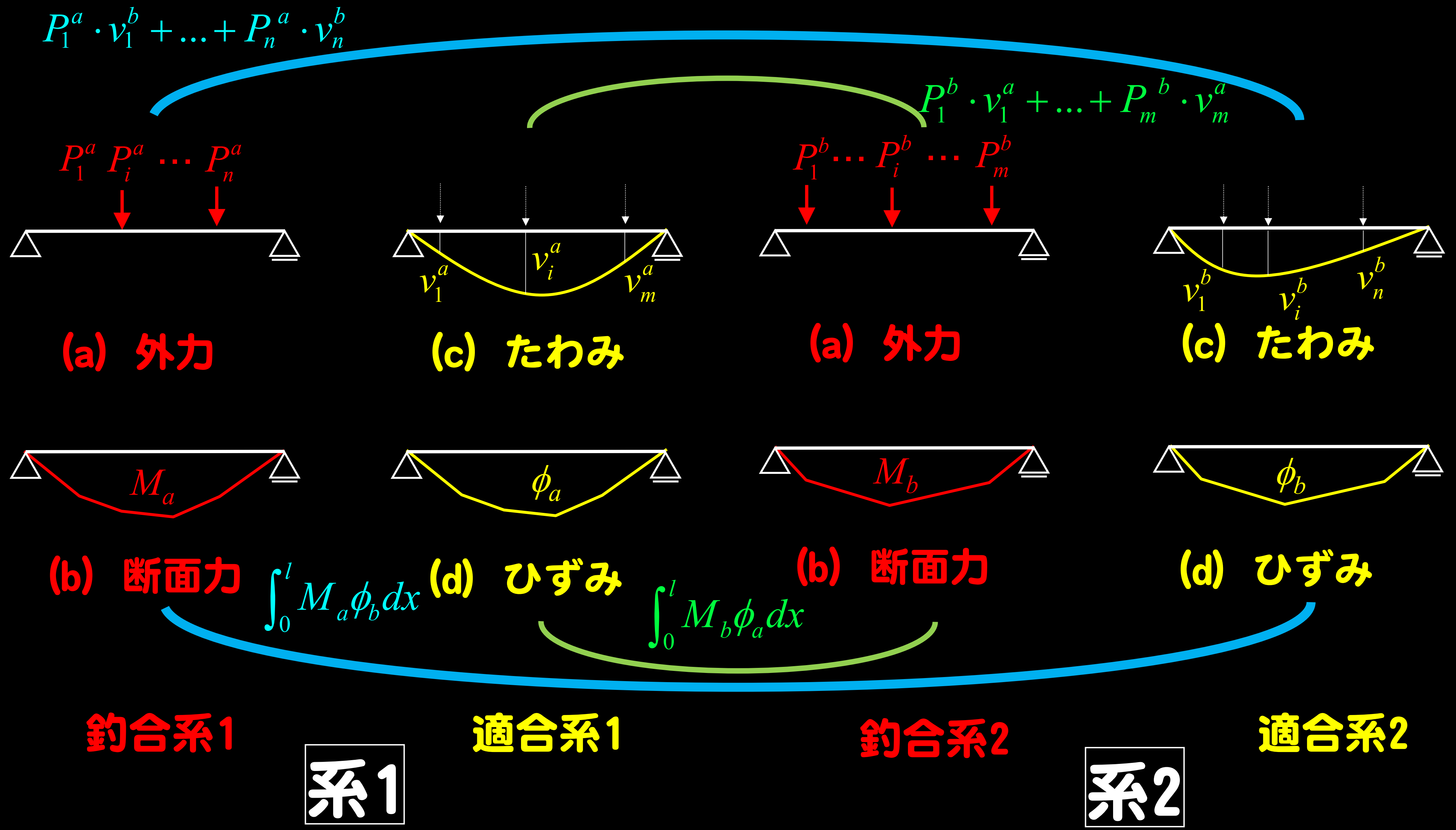
ダイバージェンスの定理式

$$\overline{M}_O\cdot\theta(l)=\int_0^l\overline{M}\cdot\phi dx$$

$\overline{M}_O=1$として，右辺を計算すれば
たわみ角$\theta(l)$が求まる

単位仮想荷重法である．

例題7 相反定理へ 1



$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b$
$P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a$
P_1^a P_i^a … P_n^a
P_1^b … P_i^b … P_m^b
v_1^a v_i^a v_m^a
v_1^b v_i^b v_n^b
(a) 外力
(c) たわみ
(a) 外力
(c) たわみ
M_a
ϕ_a
M_b
ϕ_b
(b) 断面力
$\int_0^l M_a \phi_b dx$
(d) ひずみ
$\int_0^l M_b \phi_a dx$
(b) 断面力
(d) ひずみ
釣合系1
適合系1
釣合系2
適合系2
系1
系2

例題7（続） 相反定理へ 2

釣合系1の外力・断面力が適合系2の変位・ひずみに対してなす仮想仕事

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = \int_0^l M_a \cdot \phi_b dx$$

釣合系2の外力・断面力が適合系1の変位・ひずみに対してなす仮想仕事

$$P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a = \int_0^l M_b \cdot \phi_a dx$$

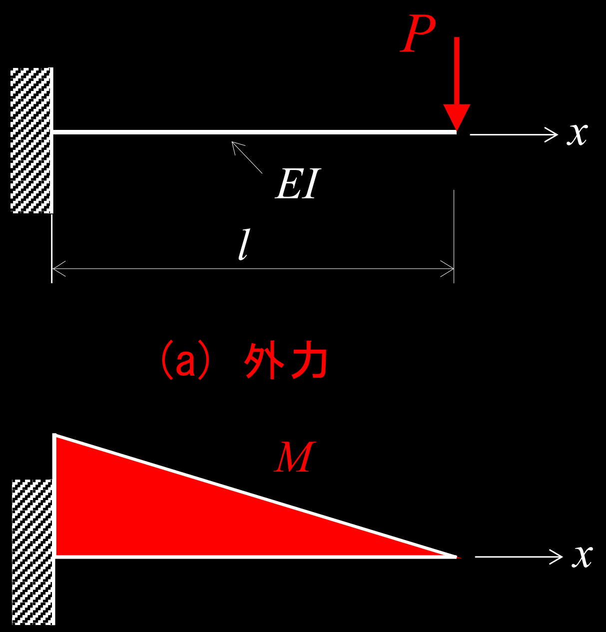
線形弾性体であれば， $\int_0^l M_a \cdot \phi_b dx = \int_0^l M_a \frac{M_b}{EI} dx = \int_0^l M_b \frac{M_a}{EI} dx = \int_0^l M_b \cdot \phi_a dx$

したがって，下式の相反定理が得られる

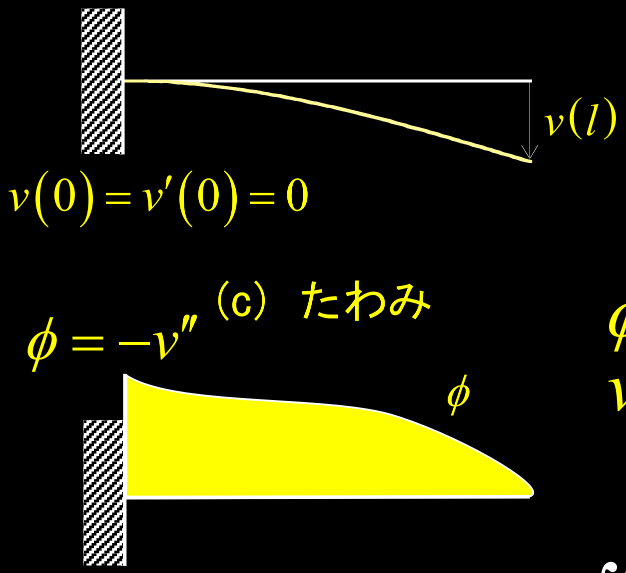
$$\boxed{P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a}$$

例題8　仮想仕事の原理へ　1

片持ち梁の先端に集中荷重のある釣合系



釣合系1



適合系1

ダイバージェンスの定理式

$$P\cdot v(l)=\int_0^l M(x)\cdot\phi(x)dx$$

$\phi=-v''$ を用いて，右辺を**2回部分積分**して

$v(0)=v'(0)=0$ を用いて，整理すると

$$\int_0^l M''\cdot v dx+M(l)\cdot v'(l)+\left(P-M'(l)\right)\cdot v(l)=0$$

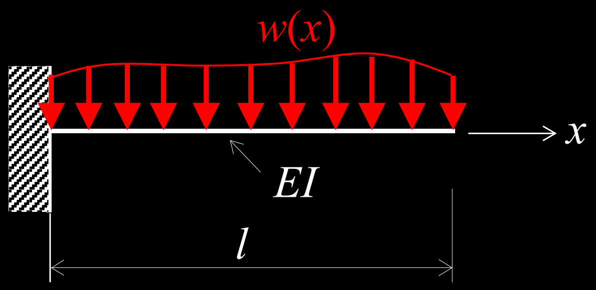
任意の$v(x)$に対して，上式が恒に成立するためには，次式が成立つ必要がある．

$$\boxed{\begin{cases} M''=0 \\ M(l)=0 \\ P-M'(l)=0 \end{cases}}$$

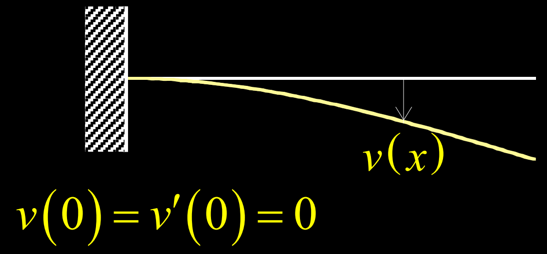
釣合い式と力学的境界条件が得られた

例題9 仮想仕事の原理へ 2

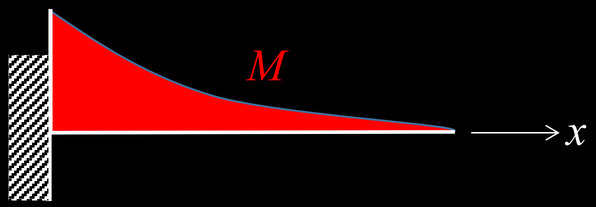
片持ち梁に分布荷重が作用する釣合系



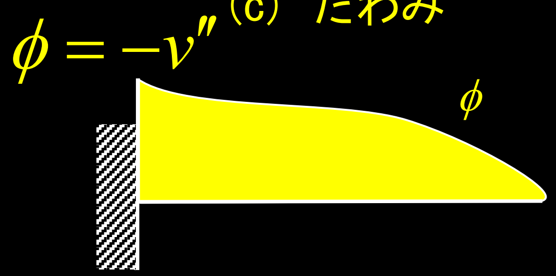
(a) 外力



(c) たわみ



(b) 断面力



(d) ひずみ

釣合系1

適合系1

ダイバージェンスの定理式

$$\int_0^l w(x)\cdot v(x)\,dx=\int_0^l M(x)\cdot\phi(x)\,dx$$

$\phi=-v''$ を用いて，右辺を**2回部分積分**して

$v(0)=v'(0)=0$ を用いて，整理すると

$$\int_0^l \left(M''+w\right)\cdot v(x)\,dx+M(l)\cdot v'(l)-M'(l)\cdot v(l)=0$$

任意の$v(x)$に対して，上式が恒に成立するためには，次式が成立つ必要がある．

$$\begin{cases} M''+w=0 \\ M(l)=0 \\ M'(l)=0 \end{cases}$$

釣合い式と力学的境界条件が得られた

まとめ 1

ダイバージェンスの定理から，線形弾性体を仮定することにより，単位仮想荷重法，相反定理が得られることを示した。

ダイバージェンスの定理式より，ひずみ－変位関係，幾何学的境界条件を付帯条件とすることにより，釣合い式と力学的境界条件が得られることを示した。これは仮想仕事の原理に他ならない。

まとめ 2

1) 例題1, 2：ダイバージェンスの定理式の記述

2) 例題3,4：ダイバージェンスの定理の成立を具体例で確認

3) 例題5, 6：単位仮想荷重法

4) 例題7：相反定理

5) 例題8,9：仮想仕事の原理

次の解説について

⑤ 単位仮想荷重法を解説します.

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．

2021年4月版